Lista 1: Cálculo I

A. Ramos *

March 8, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Funções

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Domínio, imagem e gráfico de funções

1. Seja $f : [-2, 4) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$. Encontre a imagem de f.*Rpta* $im(f) = [-3/5, 1]$.

2. Considere $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{|1-x|}$. Ache o domínio, imagem e gráfico de f.

3. Seja $f(x) = (x - [\![x]\!])^2$. Encontre o dominio e a imagem de f. Faça o gráfico de f. *Rpta:* $dom(f) = \mathbb{R}$, $im(f) = [0, 1)$.

4. Encontre o dominio, a imagem e o gráfico de
$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{|x + 1|}.$$
Rpta: $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $im(f) = (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$

5. Seja $f(x)$ uma função lineal tal que $f(-1) = 2$ e $f(2) = -3$. *Rpta:* $f(x) = (-5x + 1)/3$.

2.2 Operações básicas para funções

1. Encontre o produto de f e g se
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{, se } x \geq 1 \\ x^2 - 2 & \text{, se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{, se } x \leq 8 \\ x^3 & \text{, se } x > 10 \end{cases}$$
Rpta:
$$(f.g)(x) = \begin{cases} 3x^3 + x^2 - 6x - 2 & \text{, se } x < 0 \\ 6x^2 + 5x + 1 & \text{, se } 1 \leq x \leq 8 \\ 4x^4 + 2x^3 & \text{, se } 10 < x \end{cases}$$

2. Encontre a divisão de f e g se
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{, se } x \geq 1 \\ \sqrt{x} & \text{, se } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{, se } x < 0 \\ x & \text{, se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 5 & \text{, se } x > 2 \end{cases}$$
Rpta:
$$(\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & \text{, se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x} & \text{, se } x \in (0, 1] \\ \frac{\sqrt{x}}{x+5} & \text{, se } x \in [4, \infty] \end{cases}$$

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

3. Encontre a composição de $f \circ g$ se
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \text{se } x \geq 1 \\ x-1 & , \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{se } x < 0 \\ 1-x & , \text{se } 0 \leq x \geq 0 \end{cases}$$
Rpta:
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ x^2 + 2 & , \text{se } x \in [-1, 0) \\ 3 - x & , \text{se } x \in [0, \infty] \end{cases}$$

4. (a) Se $f(x-1) = x-2$ e $(g \circ f)(x+2) = 2x^2 - x$. Encontre $g(x)$. *Rpta:* $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
   (b) Se $F(x) = \cos(2x)$ e $f(x) = \sin(x)$. Encontre $g(x)$ tal que $F(x) = (g \circ f)(x)$. *Rpta:* $g(x) = 1 - 2x^2$.

5. Considere as funções f e g definidas como
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{|1-x|} \quad \text{e} \quad g(x) = 2\cos(\frac{2\pi}{3}(\frac{|x|}{x^2+1})).$$
Analise a existência da composição de $f \circ g$.

2.3 Funções injetoras, sobrejetoras e inversas

Lembre: Uma função f é injetora se para todo $a, b \in dom(f)$ tal que $f(a) = f(b)$ então temos que $a = b$.
Observação: Sejam f e g duas funções injetoras tal que $f \circ g$ existe. Então $f \circ g$ é injetora e a inversa satisfaz
$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$
Mostre essa observação.

1. Mostre que toda função crescente (ou decrescente) é injetora.
2. Considere $f : X \to (-4, 1]$ com $f(x) = \frac{10+3x}{10-2x}$.
   (a) Determine X para que f seja sobrejetora. *Rpta:* $X = (-\infty, 0] \cup (10, \infty)$.
   (b) Mostre que f é injetora.
3. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ 4x^2 & , \text{se } x \in [-1, 0] \\ x+4 & , \text{se } x \in (0, \infty] \end{cases}$$
Calcule a inversa de f e faça o gráfico de f^{-1}. *Rpta:*
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , \text{se } x \in (-\infty, -3) \\ -\frac{\sqrt{2x}}{2} & , \text{se } x \in [0, 4] \\ x-4 & , \text{se } x \in (4, \infty] \end{cases}$$
4. Considere as funções
$$g(x) = \frac{x}{x+2}, \text{se } x < -2 \text{ e } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 2 & , \text{se } x \in (-2, 3] \\ \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} & , \text{se } x \in (3, \infty) \end{cases}$$
Calcule $g^{-1} \circ f$. *Rpta:*
$$(g^{-1} \circ f)(x) = \begin{cases} -\frac{4(x^2-6x+1)}{2x^2-12x+1} & , \text{se } x \in (-2, 3-\sqrt{17}) \\ \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3-\sqrt{x+2}}} & , \text{se } x > 3 \end{cases}$$
5. Considere
$$f(x) = \frac{4x + |x-5| + \sqrt{x-5} + 5 - x[\![x]\!]}{\sqrt{6-x}}.$$
Ache a inversa, se ela existe. *Rpta:* Se existe e $f^{-1}(x) = \frac{6x^2+5}{x^2+1}$.